

Clase Auxiliar Lunes 24 de Noviembre

Problema 1

Durante el mes  $t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) una botillería se enfrenta a una demanda de  $d_t$  unidades de su producto artesanal “Pistol-Cola”. El costo de producción de los insumos para producir tan singular brebaje durante el mes  $t$  tiene dos componentes. En primer lugar, se incurre en un costo de  $C_t(x_t)$  si se producen  $x$  unidades en el mes  $t$ . Segundo, si el nivel de producción de la empresa durante el mes  $t-1$  es  $x_{t-1}$  y el nivel de producción durante el mes  $t$  es  $x_t$ , entonces se incurrirá, durante el mes  $t$ , en un costo de suavizamiento o atenuación igual a  $A \cdot |x_t - x_{t-1}|$ . Al final de cada mes se incurre en un costo de almacenamiento de  $h_t$ , por unidad. Adicionalmente se incurre en un costo de  $I_t$  por cada unidad de demanda insatisfecha durante el mes  $t$ , la cual se desplazará para el mes siguiente, es decir, si se tienen  $y$  clientes insatisfechos el mes  $t$ , la demanda en el mes  $t+1$  será  $d_{t+1} + y$ . El costo de terminar el período de planificación con algún cliente insatisfecho es *muy alto*. Se sabe que inicialmente se cuenta con un inventario de  $S_1$  productos y que la producción del mes  $0$  fue  $x_0$ .

Plantee un modelo de programación dinámica que permita a la empresa maximizar las ganancias en los próximos  $T$  meses.

Solución Problema 1

La idea de la Programación Dinámica sigue un determinado procedimiento. En general, para la resolución haremos lo siguiente:

- Definición de Etapas
- Definición de variables de estado
- Definición de las variables de decisión
- Definición de las ecuaciones de recurrencia
- Fijar las condiciones de borde

Por lo tanto desarrollaremos para este problema los pasos mencionados.

Definición de Variables

Etapas

Meses en el estudio  $t = 1, 2, 3, \dots, T$

### Estados

$S_t$  = Inventario al comienzo del mes  $t$   
 $X_{t-1}$  = Producción del Mes Anterior  
 $D_t$  = Demanda real a enfrentar en el mes  $t$

### Variables de Decisión

$X_t$  = Cantidad a producir en el mes  $t$   
 $Y_t$  = Cantidad de personas a dejar insatisfecha en el mes  $t$

Asumamos que cuando hablamos de demanda real es la demanda  $d_t$  asociada a la etapa o mes, más las demandas rezagadas en periodos anteriores,  $y_t$ .

### Ecuación de Recurrencia

Sea

$U(X_{t-1}, D_t, S_t; X_t, Y_t)$ , Beneficio acumulado al período  $t$  si se llega con  $X_{t-1}, D_t$  y  $S_t$  como estado de la etapa y se toman  $X_t$  y  $Y_t$  como decisiones.

$U^*(X_{t-1}, D_t, S_t)$ , Beneficio Máximo acumulado del período  $T+1$  si se llega en el estado definido por las variables respectivas.

En base a lo anterior podemos generar la ecuación de recurrencia.

#### - Mes $T+1$

Necesitamos determinar alguna condición de parada de nuestra recurrencia. Si nos basamos en lo que nos dice el enunciado: “*El costo de terminar el período de planificación con algún cliente insatisfecho es muy alto*”, podemos determinar que la condición para el mes último es,

$$U(X_T, D_T, S_{T+1}; X_T, Y_T) = \begin{cases} -\infty & \text{Si } D_{T+1} > 0 \\ 0 & \text{Si } D_{T+1} = 0 \end{cases}$$

Esto nos quiere decir que si la demanda en el periodo  $T+1$ , es decir el último o por definición de condición de borde, la posterior a la última esto nos generaría una utilidad muy mala debido al alto costo que esto trae consigo. Nuestra idea podría ser intentar no dejar clientes insatisfechos, luego debemos considerar la condición cuando se llega a este periodo sin clientes insatisfechos.

Es fácil ver que acá conseguimos generar una etapa de término para conseguir comparar los escenarios existentes.

Continuando con las etapas restantes tenemos.

- Mes  $t$

En ese caso debemos reconocer los términos que se presentan en cada etapa  $t$ . Como estamos hablando de utilidades, los términos correspondientes a costos los anotaremos como valores negativos.

Los términos presentes en cada etapa son los siguientes:

Costo de Producción

Este término es dependiente de lo que se produzca solo en el periodo en cuestión por lo tanto lo representamos así

$$- C_t(X_t)$$

Costo de suavizamiento o atenuación

Este término tiene dependencia directa de dos etapas, en la producción que se haya realizado en estas, pero solamente del número de la etapa en la que uno se encuentra y no de los estados que tenía esta. Por lo tanto la podemos especificar de la siguiente manera.

$$- A \cdot |x_t - x_{t-1}|$$

Costo de almacenamiento

Esta variable se hace presente si la cantidad de producción en la etapa respectiva más el nivel de inventario presente son mayores a las demandas a las que se enfrenta la botillería. Por lo tanto debemos tener en consideración este supuesto. Luego este término lo especificamos de la siguiente manera.

$$- h_t \cdot (X_t + S_t - (D_t + Y_t))$$

Costo por demanda insatisfecha

Este costo se hace presente solo cuando el valor de  $y_t$  no es nulo. Por lo tanto debemos considerar la siguiente estructura para este término.

$$- I_t \cdot Y_t$$

Utilidad Acumulada Máxima

En esta etapa debemos representar la relación existente entre las etapas dentro de la recurrencia. Por lo tanto necesitamos determinar como varían las

variables de estado de una etapa a otra. Por lo cual podemos reunir todos los términos antes mencionados para generar la estructura de la programación matemática<sup>1</sup>.

$$\begin{aligned}
 U^*(X_t, D_{t+1} + Y_t, X_t + S_t - (D_t + Y_t)) = \\
 - C_t(X_t) - A \cdot |x_t - x_{t-1}| - h_t \cdot (X_t + S_t - (D_t + Y_t)) - I_t \cdot Y_t \\
 + U^*(X_t, D_{t+1} + Y_t, X_t + S_t - (D_t + Y_t))
 \end{aligned}$$

Viendo esto debemos recordar que

$$U^*(X_{t-1}, D_t, S_t) = \max_{X_t, Y_t} \{U(X_{t-1}, D_t, S_t; X_t, Y_t)\}$$

Debemos recordar algunos de los supuestos que se necesitaban para proceder.

s.a

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $X_t \geq 0$               | Producción positiva                             |
| $D_t \geq Y_t \geq 0$      | No más insatisfechos que la demanda total.      |
| $S_t + X_t \geq D_t + Y_t$ | La Oferta mayor que la demanda en cada periodo. |

## Problema 2

Un prestigioso taller mecánico, especialista en mantención y reparación de motores, tiene una máquina especializada para estos fines y desea saber cuando cambiar dicha máquina. Para ello cuenta con los siguientes datos:

- Una máquina nueva cuesta  $C$  [u.m].
- El taller puede mantener una máquina por 1, 2 o 3 años.
- Una máquina con  $i$  años de uso puede ser vendida en el mercado en  $v_i$  [u.m].
- El costo anual de mantención de una máquina con  $i$  años de uso es  $m_i$  [u.m].

---

<sup>1</sup> Notemos que en el último término se hacen las actualizaciones para los términos dependientes de otras etapas. En otras palabras, como la producción no depende de periodos pasados no se actualiza, sin embargo los términos de inventario es necesario actualizarlos, al igual que los clientes insatisfechos.

El taller busca una política óptima de reemplazo que minimice los costos totales durante los 5 años, restringidos a que siempre debe haber una máquina. Asuma que se compró una máquina el año 1 y que se venderá, sí o sí, al final del año 5.

### Solución Problema 2

En el problema identificamos:

#### Etapas

Corresponden a los años del horizonte ( $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$ ).

#### Variables de Decisión

En cada etapa debemos decidir si conservar o cambiar la máquina.

#### Variables de Estados

Edad de la máquina al final de la etapa ( $l_{t_0}, l_{t_1}, l_{t_3}, l_{t_4}, l_{t_5}$ ).

Notamos que:

Como dice el enunciado estamos obligados a comprar en el primer periodo y vender en el último. Además, notamos que los estados están definidos por las edades de las máquinas que se tiene en cada estado. Por lo tanto debemos definir este conjunto de la siguiente manera<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned}l_0 &\in \{0\} \\l_1 &\in \{1\} \\l_2 &\in \{1,2\} \\l_{3,4,5} &\in \{1,2,3\}\end{aligned}$$

Para seguir definimos lo siguiente.

$V_{t_i}(l_i)$  = Costo de la política óptima desde  $t_i$  hasta el final, dado que la edad de la máquina para el análisis es  $l_i$ .

Luego dado que necesitamos conocer la política óptima de reemplazo para esta máquina debemos obtener el término  $V_{t_0}(l_0)$ . Denotaremos los costos como valores positivos.

Debemos encontrar a continuación la ecuación de recurrencia e ir comparando los casos cuando es mejor cambiar o conservar (Esto último definirá de mejor manera la política que se debe llevar a cabo).

#### Ecuación de Recurrencia

---

<sup>2</sup> Esto quedará más claro en el desarrollo de las etapas de la recurrencia.

Para poder generalizar las ecuaciones de recurrencia debemos ver los factores que intervienen. Para esto debemos dividir cada etapa en dos, las cuales corresponden a las decisiones que tenemos presentes.

#### Caso: Cambiar

En este caso si cambiamos la máquina debemos considerar el costo de cambiarla y el valor asociado a la venta de la máquina dependiendo la vida que esta llevaba hasta esa etapa, además debemos tener en cuenta que si cambiamos tendremos en la siguiente etapa una máquina de un año de vida lo cual nos significa una mantención involucrada. Dada la recurrencia, también debemos considerar el beneficio(costos) acumulado en etapas posteriores. Para esto debemos ver que el valor que se debe tomar será siempre el de una máquina con 1 año de vida, pues la cambiamos una etapa antes.

#### Caso: Conservar

En este caso si cambiamos la máquina debemos considerar el costo de la mantención de una máquina un año más vieja. Junto con el valor de beneficios(costos) acumulado de etapas posteriores para una máquina un año más vieja, dado que no la cambiamos.

Veamos como se presentan las recurrencias para cada una de las etapas.

#### - Año 5

Dado que al final del periodo debemos vender la máquina tenemos,

$$V_{t_5}(l_5) = -v_{l_5}$$

#### - Año 4

Es fácil notar que el problema a resolver debe depender de cuanto tiempo tiene la máquina de vida. De hecho, como a lo mas puede tener 3 años, en ese caso solo se puede cambiar.

$$\begin{aligned} V_{t_4}(l_{t_4} = 3) &= -v_{l_4=3} + c + m_1 + V_{t_5}(l_{t_5} = 1) && \text{(Cambiar)} \\ V_{t_4}(l_{t_4} = 2) &= \begin{cases} -v_{l_4=2} + c + m_1 + V_{t_5}(l_{t_5} = 1) & \text{(Cambiar)} \\ m_3 + V_{t_5}(l_{t_5} = 3) & \text{(Conservar)} \end{cases} \\ V_{t_4}(l_{t_4} = 1) &= \begin{cases} -v_{l_4=1} + c + m_1 + V_{t_5}(l_{t_5} = 1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_5}(l_{t_5} = 2) & \text{(Conservar)} \end{cases} \end{aligned}$$

#### - Año 3

Al igual que antes la resolución del problema depende de la edad que tenga la máquina.

$$\begin{aligned} V_{t_3}(l_{t_3} = 3) &= -v_{l_3=3} + c + m_1 + V_{t_4}(l_{t_4} = 1) && \text{(Cambiar)} \\ V_{t_3}(l_{t_3} = 2) &= \begin{cases} -v_{l_3=2} + c + m_1 + V_{t_4}(l_{t_4} = 1) & \text{(Cambiar)} \\ m_3 + V_{t_4}(l_{t_4} = 3) & \text{(Conservar)} \end{cases} \\ V_{t_3}(l_{t_3} = 1) &= \begin{cases} -v_{l_3=1} + c + m_1 + V_{t_4}(l_{t_4} = 1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_4}(l_{t_4} = 2) & \text{(Conservar)} \end{cases} \end{aligned}$$

- Año 2

En esta etapa del problema debemos considerar la vida que tiene la máquina que está en funcionamiento. Pero debemos notar que la máquina no puede llegar a tener 3 años en esta etapa, debido a que si se compro una al inicio solo podría tener uno o dos años. Luego verificamos solo esos casos.,

$$\begin{aligned} V_{t_2}(l_{t_2} = 2) &= \begin{cases} -v_{l_2=2} + c + m_1 + V_{t_3}(l_{t_3} = 1) & \text{(Cambiar)} \\ m_3 + V_{t_3}(l_{t_3} = 3) & \text{(Conservar)} \end{cases} \\ V_{t_2}(l_{t_2} = 1) &= \begin{cases} -v_{l_2=1} + c + m_1 + V_{t_3}(l_{t_3} = 1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_3}(l_{t_3} = 2) & \text{(Conservar)} \end{cases} \end{aligned}$$

- Año 1

El problema a resolver aun depende de la vida que tenga la máquina. Pero debemos notar que como estamos obligados a comprar una máquina en el año 0, entonces obligatoriamente la máquina a estas alturas tendrá 1 año.

$$V_{t_1}(l_{t_1} = 1) = \begin{cases} -v_{l_1=2} + c + m_1 + V_{t_2}(l_{t_2} = 1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_2}(l_{t_2} = 3) & \text{(Conservar)} \end{cases}$$

- Año 0

Dado que al comienzo del periodo debemos comprar obligatoriamente una máquina, necesariamente esta tiene que cambiarse, por eso no tiene valor de venta.

$$V_{t_0}(l_{t_0} = 0) = c + m_1 + V_{t_1}(l_{t_1} = 1) \quad \text{("Cambiar")}$$

Por lo tanto debemos comparara en cada etapa cual es la política óptima, desde el año 5 hacia el 1, y así calculamos cual es la mejor manera de cambiar la máquina.